# CONOCIMIENTO EN MATERIA ECONOMICA Y FINANCIERA. MODULO 11 PARTE 2

## 1. CAPITALIZACIÓN

La capitalización es el proceso por medio del cual un capital en un momento presente se traslada en el tiempo a un momento futuro.

- Capitalización **simple**: Se trata de operaciones a corto plazo, los intereses no se acumulan
- Capitalización **compuesta**: los intereses se acumulan al capital financiero y se reinvierte a largo plazo.

### 1.1. Capitalización Simple

Los intereses de un periodo cualquiera son proporcionales a la duración del periodo y al capital colocado. Los intereses no se añaden al principal.

$$I_{0,n} = C_n - C_O = C_0 \; x \; i \; x \; n$$

Donde:

$I_{0,n}$= Intereses correspondientes al plazo n

C0= Cuantía del capital inicial.

I= tipo de interés simple de la operación.

N= duración (plazo) de la operación.

Ejemplo:

Sea una operación realizada durante un periodo de 10 meses, con un capital inicial de 1.000.000€. Los intereses ***de cada mes***, si se contrata una operación al 8% anual, tendrán una cuantía constante de 6.666,67, que resulta de:

$$I = C_0 i \times m/12 = 1.000.000 \times 0{,}08 \times 1/12 = 6.666{,}67$$

Necesitado de liquidez un empresario solicita a su banco un préstamo personal 25.000 euros a 91 días, concertando cancelarlo de una sola vez a razón del 4% de interés anual. ¿Qué montante pagará a vencimiento?

Cn = Ci*(1+i*d/b) = 25.000 * (1 + (0,04*91/360)) = 25.252,78

- - - - - - - -

Necesitado de liquidez un empresario solicita a su banco un préstamo personal 15.000 euros a 180 días, concertando cancelarlo de una sola vez a razón del 2% de interés anual con una base actual/360. ¿Qué montante pagará a vencimiento?

Cn = Ci(1+i*d/b) = 15.000(1+0,02*180/360) = 15.150

## 1.2. Capitalización Compuesta

Los intereses de un periodo, en lugar de abonarse, se incorporan al capital en el siguiente periodo produciendo nuevos intereses y así de forma sucesiva.

El capital final en capitalización compuesta se obtiene mediante la fórmula:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n$$

Donde:

$C_0$= Capital inicial. $C_n$ = Es el capital final.

$i$ = tanto de interés efectivo de la operación.
$n$ = periodos de capitalización (duración de la operación)

EJERCICIOS

Calcular el valor final de una inversión de 20.000€ al 4% anual compuesto durante 6 años.

Aplicando la expresión general:

$$CC_{nn} = CC_0 \times (1 + i)^{m}$$

$$CC_{nn} = 20.000€ \times (1 + 0{,}04)^{6} = 25.306{,}38$$

Es el mismo resultado que el ejemplo anterior desarrollado flujo a flujo.

- - - - - - - -

Calcular el valor final de una inversión de 10.000€ al 4% anual compuesto durante 2.236 días, teniendo en cuenta que los años tienen 360 días.

Como en la capitalización simple, en la capitalización compuesta cuando la operación se realiza en días o en meses debemos aplicar el concepto de la base de cálculo o convenio de la operación financiera.

Aplicando la expresión general:

$$CC_{nn} = CC_0 \times (1 + i)^{\frac{d\acute{i}aaaa}{bbaaaabb}}$$

$$CC_{nn} = 10.000€ \times (1 + 0{,}04)^{\frac{2.236}{360}} = 12.758{,}39$$

## 1.3. Tantos equivalentes en operaciones financieras de capitalización compuesta, tanto de interés nominal de frecuencia "m" (siendo "m" el fraccionamiento del periodo)

Los tantos equivalentes en operaciones de capitalización compuesta son aquellas que, aplicados al mismo capital inicial y durante el mismo período de tiempo producen idéntico capital final.

Si tenemos una operación dividida en n periodos y otra dividida en m periodos los tantos equivalentes responden a la siguiente expresión:

$$(1 + i_n)^n = (1 + i_m)^m$$

Si n=1 el tanto de interés anual equivalente es conocido como Tasa Anual Equivalente (TAE) siempre que incluya las comisiones y gastos de la operación.

**Fraccionamiento del periodo de capitalización (m)**

En ocasiones el periodo anual de capitalización se divide en subperíodos, semestres, trimestres, etc… de amplitud 1/m. En estos subperíodos es costumbre trabajar sobre la base de los tantos de interés efectivo $I_m$ correspondiente a dichos subperíodos y no con las tasas nominales $J_m$ (tasas anuales referidas al período de pago o cobro de intereses.)

La relación entre los tipos nominales de un periodo $J_m$ y los tantos efectivos es $I_m$:

$$i_m = \frac{J_m}{m}$$

**TIPOS DE INTERÉS FRACCIONADOS**

El valor final de 1 € al tanto efectivo anual por uno i, es de (1 + i). De manera semejante, el valor final de 1€ al tanto anual nominal por uno j, con m capitalizaciones por año, es:

Independientemente del número de capitalizaciones anuales ambos valores tienen que ser equivalentes (iguales), por tanto:

$$C_n = C_o(1+i)^n = C_0(1+\frac{J}{m})^{m*n}$$

Y despejando i tenemos:

$$i = (1+\frac{J}{m})^m - 1$$

Cuando las capitalizaciones en un año son un numero m cualquiera.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el tanto efectivo bimestral ($i_6$) si el tipo de interés de la cuenta es el 8% nominal anual capitalizado trimestralmente ($j_4$)?

Lo primero que debemos hacer es obtener de forma directa el tipo de interés efectivo trimestral ( $i_4$ ), y posteriormente calcular el tipo equivalente semestral ( $i_6$ ).

$$i_4 = \frac{j_4}{4} = \frac{8\%}{4} = 2\%$$

$$(1+i_6)^6 = (1+i_4)^4$$

$$(1+i_6)^{\frac{6}{6}} = (1+i_4)^{\frac{4}{6}}$$

$$i_6 = (1+i_4)^{\frac{4}{6}} - 1$$

$$i_6 = (1+0{,}02)^{\frac{4}{6}} - 1 = 0{,}013$$

## 2. DESCUENTO

En una operación de descuento se quiere conocer cuál es el valor equivalente hoy de un capital que obtendremos en el futuro.

Elementos de las operaciones de descuento:

Descuento (Dc): diferencia entre el valor final y el valor que se recibe en el momento de descontar el efecto

Valor efectivo (Co): es valor nominal menos el descuento.

Valor final (Cn): valor nominal al vencimiento.

Tipo o tasa de descuento (d)

Plazo (n) periodo de duración del descuento.

### 2.1. Descuento Simple

#### 2.1.1 Operación de descuento simple: comercial o bancario

Es el utilizado en las operaciones comerciales, se cobran los intereses por adelantado sobre el valor nominal del documento.

Las fórmulas utilizadas son:

$$D_c = C_n * n * d$$

$$C_o = C_n \, x \, (1 - d * n) = C_n - D_c$$

EJEMPLO

1.- Si se descuenta un efecto de 1.000€ durante un periodo de 4 años al 5%, y deseamos conocer el importe del descuento ( $D_c$) y el capital efectivo que se obtendrá $C_o$ (capital descontado) será:

$$D_c = C_n \cdot d \cdot n = 1000 \cdot 4 \cdot 0{,}05 = 200$$

$$C_0 = C_n \cdot (1 - d \cdot n) = C_n - D_C = 1000 - 200 = 800$$

### 2.1.2 Operación de descuento racional o matemático.

Su valor se obtiene a partir de la fórmula:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{1 + i \cdot n}}$$

I: tipo de interés simple, suele expresarse en %y en general se aplica a un plazo anual.

Solamente se utiliza si se indica de forma expresa. Evita dos problemas del descuento comercial:

- Que no reproduce el mismo capital y
- Que el valor actual puede ser negativo.

EJEMPLOS

Calcular el capital a invertir hoy al 3,5% simple anual si se quiere disponer de 10.000€ dentro de 12 meses.

Aplicando el descuento racional simple

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + i \times n} = \frac{10.000}{1 + 0{,}035 \times 1} = 9.661{,}84€$$

- - - - - - - -

Calcular el valor presente de 10.000€ dentro de seis meses, con un tipo del 4% anual simple.

Aplicando el descuento racional simple

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + i \times n} = \frac{10.000}{1 + 0{,}04 \times \frac{6}{12}} = 9.803{,}92€$$

- - - - - - - -

## 2.2. Descuento compuesto

El valor actual equivalente se obtiene de despejar en la ecuación de capitalización compuesta el valor inicial.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n} = C_n F_d$$

Siendo $F_d = \frac{1}{(1+i)^n}$ el factor de actualización.

EJERCICIOS

Determinar el efectivo a percibir si se descuenta a interés compuesto del 6% una letra de 12.000 euros nominales que vence dentro de 5 años.

$$12.000 = C_i * (1+0,06)^5$$

$$C_i = 12.000 / (1+0,06)^5 = 8.967,10$$

.....

Dª. Marta Marín desea saber cuál sería el efectivo a percibir si se descuenta a interés compuesto del 8% una letra de 12.000 euros nominales que vence dentro de 6 años. Usted, como asesor personal, le indicará que el efectivo a percibir sería de:

$$12.000 = C_i \times (1+0,08)^6;\ C_i = 12.000 / (1+0,08)^6 = 7.562,03$$

### 2.2.1 Factor de capitalización y de descuento

En las operaciones de capitalización el interés se centra en conocer el valor futuro de una unidad monetaria de hoy.

El valor final de un capital, en capitalización compuesta, se obtiene mediante la igualdad:

$$\boxed{C_n = C_o(1+i)^n}$$

Cuando el capital inicial Co= 1€, el capital final será: $C_n = 1 * (1+i)^n$

Al factor $(1+i)^n$ le denominamos el factor de capitalización. Y nos indica el valor final de 1 € transcurridas n unidades de tiempo.

Si queremos conocer cuál es el valor actual de una unidad monetaria futura, tendremos que despejar Co:

$$C_o = C_n(1+i)^{-n}$$

Al factor $(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$ le denominamos **factor de descuento** y nos informa del valor actual de una unidad monetaria disponible dentro de n años.

**EJEMPLOS**

¿Valor final de 1 euro dentro de .... años si capitalizamos al 5% de interés compuesto?

1 año = $1*(1+5\%)^1$ = 1,05

3 años = $1*(1+5\%)^3$ = 1,16

- - - - - - - -

¿Valor actual de 1 euro dentro de .... años si actualizamos al 5% de interés compuesto?

1 año = $1*(1+5\%)^{-1}$ = $1 / (1+5\%)^1$ = 0,9523

3 años = $1*(1+5\%)^{-3}$ = $1 / (1+5\%)^3$ = 0,8638

- - - - - - - -

¿Cuál sería el tipo efectivo anual i si nos pagan un 3% efectivo cuatrimestral?

Aplicando la fórmula anterior tendríamos que: $(1+0{,}03)^3 = (1 + i)^1$ ,

Y por tanto, el tipo efectivo anual i = $(1+0{,}03)^3 - 1$ = 0,0927 = 9,27%

- - - - - - - -

¿Cuál sería el efectivo semestral si nos pagan un efectivo anual del 8%?

Aplicando la fórmula anterior tendríamos que: $(1 + i_2)^2 = (1 + 8\%)^1$

Y por tanto, el tipo efectivo semestral sería:

$$i_2 = (1 + 8\%)^{1/2} - 1 = 0{,}039 = 3{,}92\%$$

Es importante diferenciar entre tasa nominal y tasa efectiva:

- Tasa nominal es que se acuerda en una operación financiera.
- Tasa efectiva es la que realmente actúa sobre el capital de la operación financiera.

## 3. RENTABILIDAD

### 3.1. Nominal y real

Dos tipos:

Tipo de Interés NOMINAL: es el que permite saber cuál será el valor futuro de una unidad monetaria transcurrido un tiempo, que generalmente se considera anual.

**EJEMPLO**

Si un capital se invierte al 8% anual indica que dentro de un año un capital de 100€ se habrá incrementado en 8€ más, por lo que el capital resultante será de 108€. Ahora bien, ese rendimiento nominal o monetario no asegura la capacidad de compra de dicho importe. Sería posible que con los 108€ obtenidos transcurridos un año, no fuese posible comprar igual cantidad de bienes y servicios que se podían comprar con los 100€ del año de partida.

Tipo de Interés **REAL**: mide el rendimiento de un capital prestado, en términos de la cantidad de bienes y servicios que se pueden adquirir, se calcula:

$$1 + i_r = \frac{1 + i_n}{1 + g}$$

Y despejando resulta

$$i_r = \frac{1 + i_n}{1 + g} - 1$$

g=inflación.

EJEMPLO

¿Qué inflación se espera en España, Argentina y EE.UU. durante los doce próximos meses?

Si en cada uno de esos países, nos ofrecen retribuir las cuentas bancarias que mantenemos en dichos países, a un interés nominal de 3 % anual, ¿determina la rentabilidad real de nuestras cuentas?

$$( 1+ In ) = ( 1+ Ir ) ( 1 + g)$$

Siendo

*In*= interés nominal

*Ir* = interés real

*g* = inflación

| | España | Argentina | Estados Unidos |
|---|---|---|---|
| Interés nominal, In | 3,00% | 3,00% | 3,00% |
| Inflación, g | 3,00% | 4,90% | 2,20% |
| Interés real, Ir | 0,00% | -1,81% | 0,78% |

## 3.2. Rentabilidad simple

Se entiende por rentabilidad simple o total la diferencia entre el capital invertido y el capital obtenido tras la inversión en términos porcentuales:

$$Rt = \frac{Cf + Dt - Co}{Co}$$

Dt = Flujos de capital intermedio.

La rentabilidad simple no tiene en cuenta el periodo de la operación.

### 3.3. Tasa anual equivalente, TAE

Legalmente se define como la equivalencia entre la suma de intereses y gastos suplidos a cargo del cliente y un tipo de interés efectivo anual pospagable. Es aquel valor que iguala el valor actual de los efectivos recibidos y entregados incluyendo las comisiones a favor de la entidad.

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{D_n}{(1+i_k)^{t_n}} = \sum_{m=1}^{m} \frac{R_m}{(1+i_k)^{t_m}}$$

Donde:

D = disposiciones.

R = reembolsos: amortización, intereses u otros gastos incluidos en el coste o rendimiento efectivo de la operación.

n = número de entregas.

m = número de reembolsos.

$t_n$ = tiempo transcurrido desde la fecha de la equivalencia hasta la disposición n.

$t_m$ = tiempo desde la fecha de la equivalencia hasta la de reembolso m.

$i_k$ = tanto por uno efectivo referido al periodo de tiempo elegido para expresar las $t_m$ y los $t_n$ en números enteros.

La Tasa Anual Equivalente se obtendrá de la expresión general de los tantos equivalentes de acuerdo a la ley de capitalización compuesta:

$$TAE = (1+i_k)^k - 1$$

EJEMPLO

Sea un préstamo de 90.000€ de nominal y amortización anual, con un tipo de interés nominal del 4,5% y con una duración de la operación de cinco años. El préstamo tiene las siguientes características comerciales:

- comisión de apertura del 0,5% sobre el nominal prestado
- gastos iniciales de tasación de 300€
- gastos de gestoría: 300€
- gasto, al final de la operación, de registro y notaría de 1.200€

Las cuotas anuales a pagar tienen un valor de 20.501,25€[3]

Con estos datos: ¿Cuál es el coste efectivo o real para el prestatario?

Solución

Lo que el prestatario recibe al firmar el préstamo, descontando comisiones y gastos no es 90.000€ sino 88.950€:

$$90.000 - 0{,}005 \times 90.000 - 300 - 300 = 88.950€$$

Lo que paga todos los años: 20.501,25€

Además, tiene un último pago, dentro de cinco años, de 1.200€ de registro y notaría.

ACCAM

## ¿CÚANDO SE UTILIZA LA EXPRESIÓN DADA POR EL B.E.?

En un préstamo se utilizan características comerciales (unilaterales y bilaterales), si necesitamos conocer cuál es el cálculo del coste efectivo o real de nuestra operación financiera no nos vale tan sólo analizar el aspecto meramente financiero de la TAE.

En una operación financiera deberíamos hablar realmente de tres TAE: la financiera, la del prestamista y la del prestatario.

Es necesario conocer que son las características comerciales y su clasificación. Característica Comercial, es aquella que altera la prestación o contraprestación de cualquiera de las partes que intervienen en la operación.

Se clasifican en:

- Unilaterales: constituyen todos los pagos o cobros que afectan a una de las partes, tasación, registro, notario, gestoría, etc.
- Bilaterales: todos los pagos que afectan a ambas partes como la comisión de apertura, cancelación, otros gastos bancarios.

La TAE según el B.E. sería el coste efectivo o real en este caso para el prestatario, es aquella tasa anual equivalente Iki que iguala en cualquier fecha los efectivos recibidos y entregados por el prestatario a lo largo de la operación.

### 3.4. Tasa Interna de Rentabilidad/Retorno, TIR

La TIR es la tasa de interés que hace el valor actual neto o valor presente neto de la inversión igual a cero. Es decir, iguala el valor presente neto de los ingresos y de los costes.

Se suele utilizar por los operadores del mercado de renta fija en el cálculo de los precios de los bonos.

$$V_o - \frac{F_1}{(1+R)^{t_1}} - \frac{F_2}{(1+R)^{t_2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{F_n}{(1+R)^{t_n}} = 0$$

### 3.5. Valor Actual Neto (VAN)

Un activo proporciona a su propietario un flujo de rendimientos a lo largo del tiempo. Si descontamos los flujos esperados y le restamos su precio obtenemos su Valor Actual Neto:

$$VAN = Vo - \sum F_t * (1+i_t)^{-t}$$

Realizaremos una inversión cuando su VAN sea positivo, rechazando la misma si su VAN es negativo.

Sabemos que:

- La TIR es la tasa única de descuento que hace que su VAN sea 0.
- La TIR es una simplificación que se utiliza para obtener una medida única de la rentabilidad de un instrumento financiero que realiza varios pagos.
- El precio al que cotiza el mercado cada instrumento financiero es la suma del valor de cada uno de sus flujos descontados a la TIR.

Esto supone que:

- El valor actual de un activo es directamente proporcional al de los pagos que se recibirán en el futuro e inversamente proporcional a la TIR de la operación.
- Cuanto mayor (menor) es la TIR menor (mayor) es el valor actual del instrumento.

- Cuanto mayores (menores) son los flujos futuros, mayor (menor) será el valor actual del instrumento.

**EJEMPLO**

Dada la siguiente inversión: desembolso inicial de 2.000 euros y cobros de 800 euros los próximos 3 años, ¿cuál es su valor actual si nos conceden una TIR del 3%? ¿y su valor actual neto? ¿y la TIR de la inversión?

Para calcular el valor actual descontamos los flujos de 800 euros al 3%, así:

$$VA = 800*(1+3\%)^{-1} + 800*(1+3\%)^{-2} + 800*(1+3\%)^{-3} = 2.262,89$$

El VAN será la diferencia entre el desembolso inicial (precio que hay que pagar para luego recibir los flujos de 800 euros) y el valor actual de los flujos descontados, así:

VAN = -2.000 + 2.262,89 = 262,89 luego la inversión es interesante.

Para calcular la TIR debemos igualar el valor actual a cero, por lo tanto:

$$0 = -2000 + 800*(1+TIR\%)^{-1} + 800*(1+TIR\%)^{-2} + 800*(1+TIR\%)^{-3}$$

Realizando el cálculo tendremos: TIR = 9,70%.

ACCAM

## 3.6. Tasa de Rentabilidad Efectiva, TRE

La TIR supone que la reinversión de los flujos se reinvierten siempre a esa tasa TIR. Para calcular la rentabilidad si los flujos se pudieran reinvertir a distintas tasas usamos la Tasa de Rentabilidad Efectiva TRE.

Suponga ahora que los cupones pudiéramos reinvertirlos al 5% el primer año y al 6% el segundo año:

Lo primero será calcular los flujos a su vencimiento a los tipos de reinversión establecidos:

El flujo del primer año se capitaliza dos periodos más: $4*(1+5\%)^2 = 4{,}41$

El flujo del segundo año se capitaliza un periodo más: $4*(1+6\%)^1 = 4{,}24$

104, no se capitaliza ya que estamos en la fecha final.

Por lo tanto, el valor final será (4,41+4,24+104) = 112,65

Dado que el valor inicial es 100, la TRE será:

$$100 = 112{,}65*(1+ TER)^{-3}$$

$$TRE = (100/112{,}65)^{-1/3} - 1 = 4{,}05\%$$

Como puede observarse, superior al 4% que calculamos antes con la TIR, consecuencia de la posible reinversión de los cupones a tipos superiores al 4%.

## 3.7. Tasa Geométrica de Rentabilidad (TGR)

En una inversión que se divide en periodos es el tanto efectivo anual que hace equivalentes los valores inicial y final de la inversión, teniendo en cuenta que los flujos intermedios que se producen en cada periodo se reinvierten dentro de la misma inversión.

Se calcula como:

$$T.G.R. = \left[(1+R_1)(1+R_2)\ldots(1+R_3)\right]^{1/t} - 1$$

Comparación TIR / TGR:

- Si TIR > TGR, el inversor ha acertado en sus inversiones.
- Si TIR = TGR, el resultado es indiferente de la política llevada a cabo
- Si TIR < TGR, el inversor se ha equivocado en su política.